A- Généralités :

La dynamique étudie le mouvement des corps en relation avec les forces qui les produisent.
Ce domaine d'étude s'est développé avec l'ère industrielle et la construction de machines travaillant à vitesses élevées avec ou sans chocs.

I. SOLIDE EN TRANSLATION RECTILIGNE :

1. Principe Fondamental de la Dynamique :

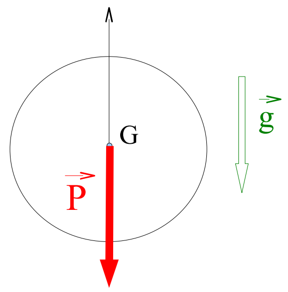
Solide évoluant à vitesse constante :
Comme pour les solides en équilibre, on applique le Principe Fondamental de la Statique.

Solide en mouvement de translation uniformément accéléré :
L'accélération $\vec{\Gamma}_G$ du centre de gravité G du solide par rapport au repère absolu est proportionnelle à la résultante des forces extérieures appliquées au solide, ainsi qu'à la masse de celui-ci.

$\vec{\Gamma}_G$: accélération du solide (en m/s²)
m : masse du solide (en Kg)
$\Sigma \vec{F}_{ext}$: résultante des forces extérieures.

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{\Gamma}_G}$$

Exemple :
Une sphère de masse m = 1 Kg est lâchée en chute libre, la résistance de l'air étant négligée.
Elle subit l'accélération de la pesanteur (accélération gravitationnelle) g = 9,81 m/s².
Le Principe Fondamental de la dynamique $\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{\Gamma}_G$ donne :



$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

$$P = m.g = 1 \cdot 9{,}81 = 9{,}81\ N$$

2. Principe de d'Alembert :

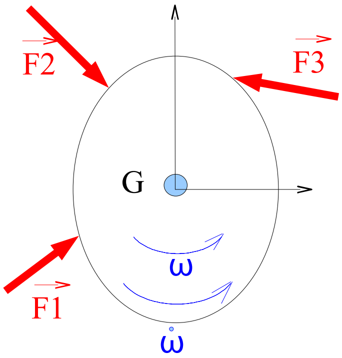
D'Alembert propose d'appeler ***force d'inertie*** la force $\boxed{\vec{F}_I = -m \cdot \vec{\Gamma}_G}$.
Le Principe Fondamental de la Dynamique peut dont s'écrire sous la forme :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} - m.\vec{\Gamma}_G = \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{F}_I = \vec{0}$$

Toutes les méthodes et théorèmes abordés en statique sont exploitables, la force d'inertie étant traitée comme une force extérieure.

II. SOLIDE EN ROTATION :

1. Cas d'un solide en rotation autour de son centre de gravité :



Un solide tourne autour d'un axe passant par son centre de gravité, à une vitesse angulaire ω et avec une accélération angulaire $\dot{\omega}$.

Soit J_G son moment d'inertie (voir page suivante).

Le Principe Fondamental de le Dynamique s'écrit :

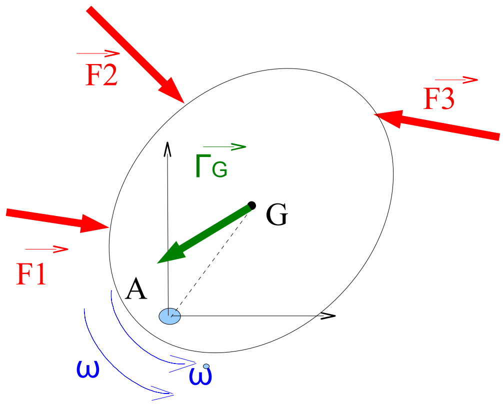
$\dot{\omega}=\ddot{\theta}$: accélération angulaire en rad/s²

$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}})$: en Nm

J_G : en m². kg

$$\boxed{\begin{array}{l}\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}=\vec{0}\\ \Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}})=J_G.\dot{\omega}\end{array}}$$

2. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe ne passant pas par le centre de gravité :



Un solide tourne autour d'un axe passant par le point A situé à une distance r deson centre de gravité, à une vitesse angulaire ω et avec une accélération angulaire $\dot{\omega}$.

m : masse du solide (en kg)

AG = r (en m)

J_A , son moment d'inertie au point A

$$\boxed{J_A=J_G+m r^2}$$

Le Principe Fondamental de le Dynamique s'écrit :

$\dot{\omega}=\ddot{\theta}$: accélération angulaire en rad/s²

$\Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}})$: en Nm

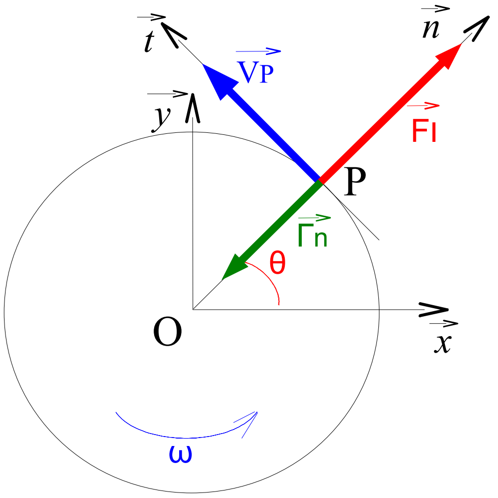
J_A : en m². Kg

$$\boxed{\begin{array}{l}\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}=m\,\overrightarrow{\Gamma_G}\\ \Sigma M_G(\overrightarrow{F_{ext}})=J_A.\dot{\omega}\end{array}}$$

3. Principe de d'Alembert :

Ce principe est appliquable aux solides en rotation .

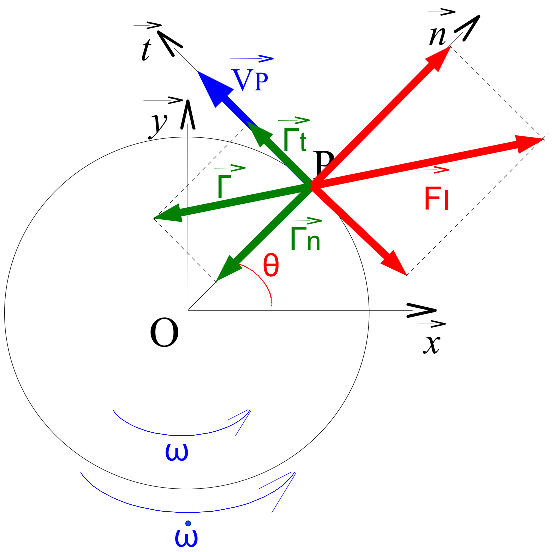
Solide en rotation à vitesse constante :



Le point P de masse m est en rotation de centre O, à la vitesse angulaire ω .
Il subit une force d'inertie $\boxed{\vec{F}_I = -m \cdot \vec{\Gamma}_G}$.
D'après les relations établies au chapitre II (cinématique du point) :

$$\boxed{\vec{F}_I = -m.\omega^2.r.\vec{n}}$$

Solide en rotation à vitesse uniformément accélérée :

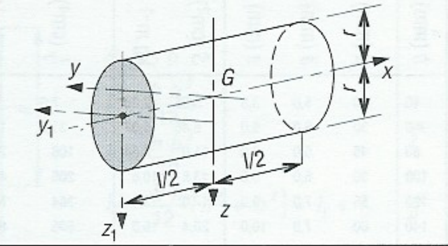
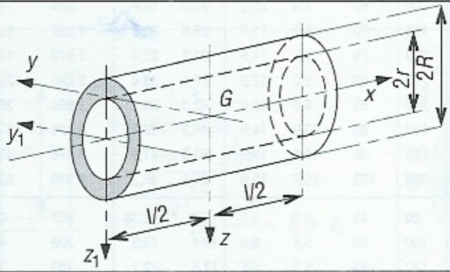
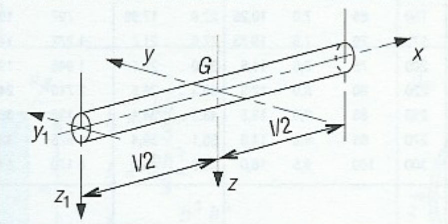
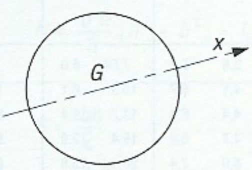
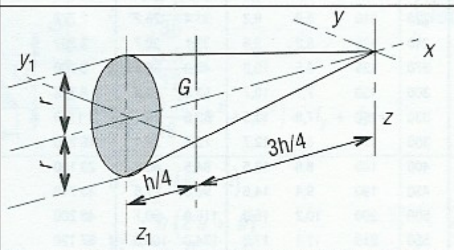
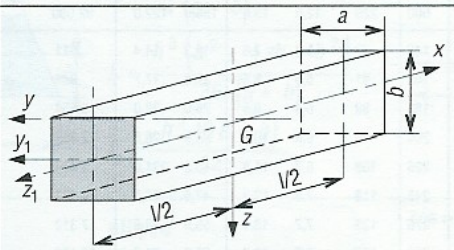
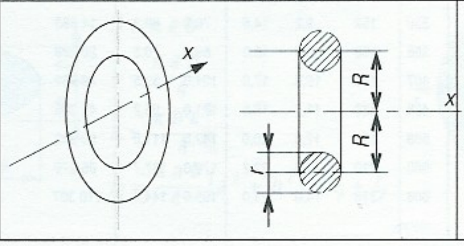


Le point P de masse m est en rotation de centre O, à la vitesse anglaire ω et avec une accélération angulaire $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$.
Il subit une force d'inertie $\boxed{\vec{F}_I = -m \cdot \vec{\Gamma}_G}$.
D'après les relations établies au chapitre II (cinématique du point) :

$$\boxed{\vec{F}_I = -m(\omega^2.r.\vec{n} + \ddot{\theta}.r.\vec{t})}$$

La force d'inertie est opposée au vecteur-accélération. Elle a donc une composante normale et une composante tangentielle.

FORMULAIRE Moments d'inertie, matrice d'inertie

<table>
<tr>
<td>Cylindre plein</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} J_x = \dfrac{mr^2}{2} \\ J_z = J_y = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{ml^2}{12} \\ J_{z1} = J_{y1} = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{ml^2}{3} \end{cases}$
m = masse du cylindre
$\boxed{\text{volume } V = \pi . r^2 . l}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Cylindre creux</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} J_x = \dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{2} \approx m.r_m^2 \left(r_m = \dfrac{R+r}{2}\right) \\ J_z = J_y = \dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{4} + \dfrac{m.l^2}{12} \\ J_{z1} = J_{y1} = \dfrac{m\left(R^2+r^2\right)}{4} + \dfrac{m.l^2}{3} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Tige pleine</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} J_z = J_y = \dfrac{m.l^2}{12} \\ J_{z1} = J_{y1} = \dfrac{m.l^2}{3} \\ J_x = 0 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Sphère</td>
<td>
</td>
<td>$\left\{ J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5} mr^2 \right.$
$\boxed{V = \dfrac{4 \pi r^3}{3}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Cône plein</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} J_x = \dfrac{3\,mr^2}{10} \\ J_y = J_z = \dfrac{3\,mr^2}{20} + \dfrac{3mh^2}{5} \\ J_{y1} = J_{z1} = \dfrac{3\,mr^2}{20} + \dfrac{mh^2}{10} \end{cases}$
$\boxed{V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Parallélé-pipède rectangle</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} J_x = \dfrac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \\ J_y = \dfrac{m}{12}\left(b^2+l^2\right) \\ J_z = \dfrac{m}{12}\left(a^2+l^2\right) \end{cases}$
$J_{y1} = \dfrac{mb^2}{12} + \dfrac{ml^2}{3}$
$\boxed{V = a.b.l}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Tore</td>
<td>
</td>
<td>$\left\{ J_x = \dfrac{m}{4}\left(4R^2+3r^2\right) \right.$
$\boxed{V = 2\pi^2 R\, r^2}$</td>
</tr>
</table>